

Welche Lage haben die Geraden g1 und g2 bezüglich einander?
 (Die mit dem Formeleditor von Word geschriebenen Geradengleichungen wurden kopiert und anschließend eingefügt)

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad k, l \in \mathbb{R}$$

$$\#1: \quad x = 4 + 6 \cdot k$$

$$\#2: \quad y = 1 + 3 \cdot k$$

$$\#3: \quad z = -1 - 6 \cdot k$$

$$\#4: \quad x = -2 - 8 \cdot l$$

$$\#5: \quad y = 4 - 4 \cdot l$$

$$\#6: \quad z = -1 + 8 \cdot l$$

Schneiden sich beide Geraden?

Von der Gleichung in #7 wird 2mal die Gleichung in #8 subtrahiert. Genauso könnte man Derive die Berechnung überlassen, indem man die rechten Seiten von #1 (#2) und #4 (#5) mit einem Gleichheitszeichen verknüpft in ein Gleichungssystem (Lösen-System-2Variable) mit F3 kopiert und anschließend vereinfacht. Dies ist zumindest zu diesem Zeitpunkt noch nicht erwünscht, da es einer "schriftlichen" Vorgehensweise der Schüler nicht entspricht. Andere Methoden zur Untersuchung der Lagebeziehung stehen zu Beginn derartiger Betrachtungen noch nicht zur Verfügung. (Dies gilt auch bei den weiteren Untersuchungen)

$$\#7: \quad 4 + 6 \cdot k = -2 - 8 \cdot l$$

$$\#8: \quad 1 + 3 \cdot k = 4 - 4 \cdot l$$

$$\#9: \quad (4 + 6 \cdot k = -2 - 8 \cdot l) - 2 \cdot (1 + 3 \cdot k = 4 - 4 \cdot l)$$

$$\#10: \quad \quad \quad 2 = -10$$

Widerspruch, also sind die Geraden (echt, ansonsten ergäben sich unendlich viele Lösungen) parallel oder windschief.

Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit der Richtungsvektoren:

$$\#11: \quad 6 = -8 \cdot l$$

$$\#12: \quad 3 = -4 \cdot l$$

$$\#13: \quad -6 = 8 \cdot l$$

$$\#14: \quad \text{NSOLVE}(3 = -4 \cdot l, l, \text{Real})$$

$$\#15: \quad \quad \quad l = -0.75$$

$$\#16: \quad \text{NSOLVE}(3 = -4 \cdot l, l, \text{Real})$$

$$\#17: \quad \quad \quad l = -0.75$$

#18: NSOLVE(-6 = 8·l, l, Real)

#19: $l = -0.75$

aus demselben Wert der drei Gleichung folgt, dass die Richtungsvektoren lin. abhängig, die Geraden folglich parallel sind.

Die beiden Geraden g1 und g2 spannen eine Ebene E1 auf. Mit Hilfe von Derive ermittelt man eine Ebenengleichung in parameterfreier Darstellung. Bei der Lösung wurden jetzt die von Derive angebotenen Möglichkeiten genutzt. Damit können die Schüler schnell die Richtigkeit ihrer schriftlichen Rechnungen überprüfen oder auch gezielt Fehler suchen.

#20: $x = 4 + 6 \cdot k - 6 \cdot l$

#21: $y = 1 + 3 \cdot k + 3 \cdot l$

#22: $z = -1 - 6 \cdot k$

#23: SOLVE([$x = 4 + 6 \cdot k - 6 \cdot l$, $y = 1 + 3 \cdot k + 3 \cdot l$], [k, l])

#24:
$$\left[k = \frac{x + 2 \cdot (y - 3)}{12} \wedge l = \frac{2 \cdot (y + 1) - x}{12} \right]$$

#25:
$$z = - \frac{x + 2 \cdot (y - 2)}{2}$$

#25 erhält man, indem man in #22 die Variable k durch den in #24 erhaltenen Term ersetzt (Schalter "Substitution "). Anschließend erfolgen nötige Umformungen.

#26:
$$\left(z = - \frac{x + 2 \cdot (y - 2)}{2} \right) \cdot 2$$

#27: $(2 \cdot z = -x - 2 \cdot y + 4) - 2 \cdot z$

#28: $0 = -x - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 4$

#29: $(0 = -x - 2 \cdot y - 2 \cdot z + 4) \cdot (-1)$

#30: $0 = x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 4$

Dies ist die Gleichung der von den beiden Geraden aufgespannten Ebene in parameterfreier Darstellung.

g ist die Schnittgerade der Ebenen E1 und E2:

Ebene E1:

#31: $x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 4 = 0$

Ebene E2

#32: $x - 4 \cdot y + 8 \cdot z + 2 = 0$

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden elementar, wie auf dem Papier:

$$\#33: (x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 4 = 0) - (x - 4 \cdot y + 8 \cdot z + 2 = 0)$$

$$\#34: 6 \cdot (y - z - 1) = 0$$

$$\#35: 6 \cdot y - 6 \cdot z - 6 = 0$$

Eine Gleichung mit 2 Unbekannten, wähle $z = r$ und löse die Gleichung nach y auf:

$$\#36: 6 \cdot y - 6 \cdot r - 6 = 0$$

$$\#37: \text{SOLVE}(6 \cdot y - 6 \cdot r - 6 = 0, y, \text{Real})$$

$$\#38: y = r + 1$$

Einsetzen in E1 ergibt:

$$\#39: x + 2 \cdot (r + 1) + 2 \cdot r - 4 = 0$$

$$\#40: x + 2 \cdot (2 \cdot r - 1) = 0$$

$$\#41: x + 4 \cdot r - 2 = 0$$

$$\#42: \text{SOLVE}(x + 4 \cdot r - 2 = 0, x, \text{Real})$$

$$\#43: x = 2 - 4 \cdot r$$

Insgesamt erhält man:

$$\#44: x = 2 - 4 \cdot r$$

$$\#45: y = 1 + r$$

$$\#46: z = r$$

oder in Vektorschreibweise mit r als beliebiger reellen Zahl:

$$\#47: [x, y, z] = [2, 1, 0] + r \cdot [-4, 1, 1]$$